

Matriz de Hurwitz y tabla de Routh: dos herramientas algebraicas para análisis y diseño de control

Ildeberto de los Santos Ruiz

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez

1. Introducción

En control automático, la **estabilidad asintótica** es una condición estructural para que el sistema tenga un comportamiento físicamente aceptable y útil desde el punto de vista de la ingeniería. De manera general, un sistema es asintóticamente estable si, en la dinámica libre asociada a su modelo, sus variables de estado o su salida convergen al equilibrio a lo largo del tiempo. En el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo, esto se traduce en una condición precisa sobre el polinomio característico: todas sus raíces deben tener parte real estrictamente negativa.

Esa condición desempeña un papel central tanto en el análisis como en el diseño de control. Permite determinar si un modelo dinámico converge o diverge sin necesidad de simular su respuesta temporal infinitamente. En diseño, permite ajustar parámetros de controladores para garantizar que el sistema en lazo cerrado no solo sea estable, sino que además posea características de desempeño compatibles con rapidez de respuesta, amortiguamiento y robustez. En ese contexto, los criterios de Hurwitz y de Routh-Hurwitz destacan como herramientas clásicas, rigurosas y aún vigentes, pues permiten determinar la estabilidad directamente a partir de los coeficientes del polinomio característico, sin calcular explícitamente sus raíces.

A continuación se presentan la **matriz de Hurwitz** y la **tabla de Routh**, junto con sus criterios de estabilidad y los casos especiales que pueden surgir en su aplicación.

2. Matriz de Hurwitz

Sea el polinomio real

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n, \quad a_0 > 0$$

donde, por convenio,

$$a_k = 0 \quad \text{si } k > n.$$

La **matriz de Hurwitz** asociada a $p(s)$ es la matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

siguiendo el patrón de desplazamiento de dos filas.

Se definen los **determinantes de Hurwitz** Δ_k como los menores principales superiores izquierdos de orden k :

$$\Delta_k = \det(H_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

donde H_k es la submatriz $k \times k$ obtenida de las primeras k filas y primeras k columnas de H .

Los primeros son:

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente.

Criterio de estabilidad de Hurwitz

Este criterio [1, 2] establece que el polinomio $p(s)$ es **Hurwitz estable**, es decir, **todas sus raíces tienen parte real estrictamente negativa**, si y solo si

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Es decir:

$$p(s) \text{ es estable} \iff \Delta_k > 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, n.$$

Este criterio aplica a polinomios con coeficientes reales. Además, aunque a veces se menciona la positividad de los coeficientes como condición necesaria, la condición completa y decisiva en el criterio de Hurwitz son justamente esos determinantes positivos.

 [Ver ejemplos en línea](#)

3. Tabla de Routh

Sea el polinomio real

$$p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n, \quad a_0 > 0$$

donde, por convenio,

$$a_k = 0 \quad \text{si } k > n.$$

La **tabla de Routh** es un arreglo tabular construido a partir de los coeficientes del polinomio. Sus dos primeras filas se forman colocando alternadamente los coeficientes:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ s^0 & & & & \end{array}$$

A partir de la tercera fila, cada elemento se calcula como un determinante 2×2 dividido por el primer elemento de la fila inmediatamente superior.

Los elementos de la fila s^{n-2} son:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$$

Los elementos de la fila siguiente son:

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \dots$$

y así sucesivamente.

De manera general, si una fila tiene como primer elemento r_1 y la fila anterior comienza con q_1 , entonces los elementos de la nueva fila se calculan con el mismo patrón recursivo.

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Este criterio [3, 4] establece que el polinomio $p(s)$ es **Hurwitz estable**, es decir, **todas sus raíces tienen parte real estrictamente negativa**, si y solo si **todos los elementos de la primera columna de la tabla de Routh son positivos**.

Es decir, si la primera columna es

$$a_0, a_1, b_1, c_1, \dots$$

entonces la estabilidad requiere que

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad \dots$$

hasta llegar a la última fila.

Otra forma de enunciarlo es:

$p(s)$ es estable $\iff$ no hay cambios de signo en la primera columna de la tabla.

Más aún, **el número de cambios de signo en la primera columna es igual al número de raíces con parte real positiva**, es decir, al número de raíces ubicadas en el semiplano derecho.

El criterio de Routh es una forma operativa del criterio de Hurwitz. Mientras que Hurwitz emplea los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, Routh permite verificar la estabilidad construyendo la tabla y revisando únicamente la primera columna.

Es importante señalar que durante la construcción pueden aparecer casos especiales:

- un cero en la primera columna,
- o una fila completa de ceros,

los cuales requieren un tratamiento adicional. Pero en el caso regular, el criterio se aplica directamente como se indicó arriba.

Casos especiales en la tabla de Routh

Durante la construcción de la tabla de Routh, pueden surgir situaciones en las que el procedimiento directo falla o requiere una interpretación adicional. Los dos casos clásicos son los siguientes.

Primer caso: cero en la primera columna de una fila

Si el primer elemento de una fila es cero, pero la fila no está formada por ceros, entonces, al calcular la fila siguiente, aparecería una división por cero.

En este caso, el procedimiento habitual consiste en sustituir temporalmente ese cero por una cantidad positiva muy pequeña, denotada por ε , es decir,

$$0 \rightarrow \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+$$

y continuar la construcción de la tabla con esa sustitución. Una vez completada la tabla, se analiza el signo de los elementos de la primera columna en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Este caso suele indicar la presencia de raíces sobre el eje imaginario o una configuración límite de estabilidad. Por ello, aunque sustituir 0 por ε permite continuar con el algoritmo, el resultado debe interpretarse con cuidado.

Segundo caso: fila completa de ceros

Si en algún paso aparece una fila cuyos elementos son todos cero, entonces la construcción normal de la tabla se detiene. Este caso es especialmente importante porque indica la presencia de raíces simétricas respecto del origen y, en particular, puede estar asociado con raíces puramente imaginarias.

Supongamos que aparece una fila de ceros correspondiente a la potencia s^k . Entonces se procede del siguiente modo:

Se toma la fila inmediatamente superior, correspondiente a la potencia s^{k+1} , y con sus coeficientes se forma un polinomio auxiliar $A(s)$. Si esa fila es

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

entonces el polinomio auxiliar se construye como

$$A(s) = \alpha_0 s^{k+1} + \alpha_1 s^{k-1} + \alpha_2 s^{k-3} + \dots$$

es decir, usando potencias descendentes de dos en dos. Luego, la fila de ceros se reemplaza por los coeficientes del polinomio derivado $A'(s)$ y con esa nueva fila se continúa la construcción de la tabla de Routh.

La aparición de una fila completa de ceros revela que el polinomio original contiene un factor asociado a raíces simétricas, del tipo

$$(s^2 + \omega^2), \quad (s^4 + \alpha s^2 + \beta), \quad \text{etc.}$$

y, por tanto, existe la posibilidad de raíces sobre el eje imaginario. En consecuencia, el sistema no es estrictamente Hurwitz estable.

Sobre la estabilidad marginal

Cuando aparecen raíces simples sobre el eje imaginario y no existen raíces en el semiplano derecho, el sistema suele clasificarse como **marginalmente estable**.

Sin embargo, el criterio clásico de Routh-Hurwitz para la estabilidad estricta exige que todas las raíces estén en el semiplano izquierdo, de modo que en presencia de raíces imaginarias puras no se satisface la condición de estabilidad asintótica estricta.

En condiciones regulares, la tabla de Routh permite decidir la estabilidad observando únicamente los signos de la primera columna. En los casos especiales, además de completar correctamente la tabla, debe prestarse atención a la interpretación física y matemática del resultado, ya que la aparición de ceros suele estar asociada con raíces sobre el eje imaginario, estabilidad marginal o casos frontera entre estabilidad e inestabilidad.

 [Ver ejemplos en línea](#)

4. Comparación de los métodos

Una vez expuestos ambos desarrollos, conviene preguntarse por qué estos criterios son relevantes tanto en cursos de control como en el análisis de sistemas dinámicos.

La primera razón es conceptual: ambos métodos deciden estabilidad sin calcular raíces de forma explícita. Eso no solo simplifica el análisis de polinomios de alto orden, sino que además permite trabajar directamente con expresiones paramétricas, lo cual resulta muy útil cuando el polinomio característico depende de ganancias, constantes físicas o parámetros de diseño.

La segunda razón es metodológica. El criterio de Hurwitz ofrece una formulación algebraica muy limpia: la estabilidad queda codificada en la positividad de una sucesión de determinantes principales. Esto lo vuelve especialmente valioso en desarrollos teóricos, demostraciones y estudios simbólicos. La tabla de Routh, en cambio, constituye una forma más operativa: organiza la misma información en un procedimiento recursivo que hace visible, de manera casi inmediata, si existen raíces en el semiplano derecho y cuántas son.

Desde el punto de vista didáctico, esa diferencia también es importante. Hurwitz ayuda a comprender la estructura algebraica del problema; Routh permite resolverlo con rapidez. Por eso, en una formación matemática rigurosa, ambos deberían estudiarse como herramientas complementarias y no como alternativas excluyentes.

5. Implementación computacional

En el terreno computacional, ambos métodos conservan plena vigencia y siguen siendo herramientas sumamente útiles para el análisis de la estabilidad en sistemas dinámicos.

El criterio de Hurwitz puede implementarse construyendo la matriz H y calculando sucesivamente los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Esta vía resulta natural en entornos de cálculo simbólico y matricial, por ejemplo, en MATLAB, Python con SymPy o Mathematica. Cuando el polinomio depende de parámetros, esta formulación puede dar lugar a desigualdades algebraicas explícitas que delimitan regiones de estabilidad.

La tabla de Routh, por su parte, resulta especialmente adecuada para la implementación algorítmica directa. Basta con almacenar las filas, calcular recursivamente los nuevos elementos y revisar la primera columna. Además, presenta una ventaja interpretativa importante: los cambios de signo no solo indican si el sistema es estable o no, sino también cuántas raíces se encuentran en el semiplano derecho.

Ahora bien, una implementación seria no debe limitarse al caso regular. Debe contemplar de manera correcta los dos casos especiales:

- el cero en la primera columna, tratado mediante una perturbación ε ,
- y la fila completa de ceros, tratada mediante el polinomio auxiliar y su derivada.

Esto es indispensable porque, precisamente, los casos frontera suelen ser los más delicados desde el punto de vista del diseño de control. Un algoritmo que ignore esos escenarios puede fallar en situaciones en las que el sistema está cerca de perder estabilidad, precisamente las que más interesa detectar.

Respecto a la implementación computacional de estos criterios, existen herramientas en línea que facilitan el cálculo y la verificación de los resultados de manera inmediata. En particular, **Hurwitz App** (<https://hurwitz-one.vercel.app/>) permite construir la matriz de Hurwitz y analizar sus determinantes asociados, mientras que **Routh App** (<https://routh.vercel.app/>) permite generar la tabla de Routh de forma automática a partir de los coeficientes del polinomio característico. Este tipo de recursos resulta especialmente útil en contextos didácticos, de validación y de exploración paramétrica, ya que ayuda a reducir errores operativos en cálculos manuales, acelera la comprobación de ejemplos y permite concentrar la atención en la interpretación de los criterios de estabilidad más que en la mecánica algebraica del procedimiento.

6. Conclusión

La estabilidad asintótica es un eje fundamental del análisis y del diseño de sistemas de control. Bajo ese marco, la matriz de Hurwitz y la tabla de Routh ofrecen dos herramientas estrechamente relacionadas para responder a la misma pregunta: si todas las raíces del polinomio característico permanecen en el semiplano izquierdo. Hurwitz aporta una caracterización algebraica rigurosa basada en determinantes. Routh aporta un procedimiento tabular eficiente, interpretable y muy útil tanto para el cálculo manual como para la automatización computacional.

Si un sistema de control ha de ser confiable, primero debe ser estable. Y para decidirlo con rigor, pocas herramientas clásicas conservan tanta elegancia y utilidad como estas. Lejos de ser únicamente recursos históricos, los criterios de Hurwitz y de Routh-Hurwitz siguen ofreciendo una base sólida para comprender, analizar e incluso implementar computacionalmente las condiciones de estabilidad en sistemas dinámicos. Su valor reside no solo en lo que permiten calcular, sino también en la claridad conceptual con la que conectan el polinomio característico con el comportamiento del sistema.

Referencias

- [1] Jeong-Heon Kim, Wei Su, and Yoon J Song. On stability of a polynomial. *Journal of applied mathematics & informatics*, 36(3_4):231–236, 2018.
- [2] Baltazar Aguirre-Hernández, Carlos Arturo Loredó-Villalobos, Edgar Cristian Díaz-González, and Eric Campos-Cantón. Estabilidad de sistemas por medio de polinomios Hurwitz. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 24(1):61–77, 2017.
- [3] Marc Bodson. Explaining the Routh–Hurwitz criterion: A tutorial presentation [focus on education]. *IEEE Control Systems Magazine*, 40(1):45–51, 2020.
- [4] Aseem Patil. Routh-Hurwitz criterion for stability: an overview and its implementation on characteristic equation vectors using MATLAB. *Emerging Technologies in Data Mining and Information Security: Proceedings of IEMIS 2020, Volume 1*, pages 319–329, 2021.

Este trabajo fue realizado con el apoyo del cuerpo académico «Turix-Dynamics» y de la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicados (RICCA) del TecNM.



Ildeberto de los Santos Ruiz es originario de Tonalá, Chiapas (1973). Ingeniero en Electrónica, Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecatrónica y Doctor en Ciencias de la Ingeniería por el Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez (ITTG); Doctor en Automática, Robótica y Visión por la Universidad Politécnica de Cataluña. Miembro de la *Association for Computing Machinery* (ACM) y del *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE). Miembro afiliado de la *International Federation of Automatic Control* (IFAC). Profesor de tiempo completo en el ITTG desde 1995, adscrito al Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Jefe de Proyectos de Investigación de Ingeniería Mecatrónica y Presidente del Claustro del Doctorado en Ciencias de la Ingeniería. Dirige proyectos de investigación en las áreas de diagnóstico y control inteligente, específicamente en robótica y en detección/localización de fugas en redes de distribución de agua.